《P2P网络借贷平台爆发风险事件问题的研究》

网络附录

刘红忠　毛　杰

【引理】

设W_t是Brown运动，μ是实数，m是正数，定义$X_t=\mu t+W_t$且$\tau_m=\min\{t\geq 0, X_t=m\}$是停时，则$\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_m}=\exp\left\{-m\left[-\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda}\right]\right\}$。

证明：

定义$\sigma=-\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda}$，$\sigma\mu+\frac{1}{2}\sigma^2=\lambda$，则$\exp\{\sigma X_t-\lambda t\}=\exp\left\{\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}$成鞅。

根据可选抽样定理，$M_t=\exp\left\{\sigma W_{t\wedge\tau_m}-\frac{1}{2}\sigma^2\left(t\wedge\tau_m\right)\right\}$也成鞅。

由此，对每个正整数n，有

$$\begin{aligned}1=M(0)=\mathbb{E}M(n)&=\mathbb{E}\exp\left\{\sigma X_{n\wedge\tau_m}-\lambda(n\wedge\tau_m)\right\}\\&=\mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma m-\lambda\tau_m\right)\cdot 1_{\{\tau_m\leq n\}}\right]+\mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma X_n-\lambda n\right)\cdot 1_{\{\tau_m>n\}}\right]\end{aligned}。$$

非负随机变量$\mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma m-\lambda\tau_m\right)\cdot 1_{\{\tau_m\leq n\}}\right]$关于n是递增的，且

$$\lim_{n\to\infty}[e^{\sigma m-\lambda\tau_m}\cdot 1_{\{\tau_m\leq n\}}]=e^{\sigma m-\lambda\tau_m}\cdot 1_{\{\tau_m<\infty\}}。$$

由单调收敛定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{\sigma m-\lambda m}\cdot 1_{\{\tau_m\leq n\}}\right]=\mathbb{E}\left[e^{\sigma m-\lambda\tau_m}\cdot 1_{\{\tau_m<\infty\}}\right]。$$

另方面，由于$0\leq e^{\sigma x_n-\lambda n}\cdot 1_{\{\tau_m>n\}}\leq e^{\sigma x_n-\lambda n}\leq e^{\sigma m}$且$\lambda$为正，则

$$\lim_{n\to\infty}e^{\sigma X_n-\lambda n}\cdot 1_{\{\tau_m>n\}}\leq\lim_{n\to\infty}e^{\sigma X_n-\lambda n}=0。$$

由控制收敛定理可知，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{\sigma X_n-\lambda n}\cdot 1_{\{\tau_m>n\}}\right]=0$。

综上，$1=\mathbb{E}[e^{\sigma m-\lambda\tau_m}\cdot 1_{\{\tau_m<\infty\}}]$，即$\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau m}\cdot 1_{\{\tau_m<\infty\}}]=e^{-\sigma m}=e^{-m(-\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda})}$。

■

【文中公式5的证明】

$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$ 首达L满足

$$-W_t - \frac{1}{\sigma}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{S_0}{L}$$

将上述引理中的 X_t 对应于 $-W_t - \frac{1}{\sigma}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$，$\mu$ 对应于 $-\frac{1}{\sigma}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$，$m$ 对应于 $\frac{1}{\sigma}\ln\frac{S_0}{L}$，即得文中结果。 ■

【文中公式6的证明】

取 $\lambda = r$，并在根号内将 r 在 μ 处取等价无穷小，即得文中结果。 ■